Chapitre 11

Équations différentielles

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, la lettre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ non trivial.

1 Généralités sur les ED

1.1 Vocabulaire des ED

Une équation différentielle (ou ED) est une équation entre fonctions qui fait intervenir une fonction inconnue (en général notée y) ainsi qu'au moins une de ses dérivées. Toutes les équations suivantes sont des ED :

$$\begin{aligned} E_1 : &\quad y' - y = 0 \\ E_2 : &\quad 4y'' + xy = \tan x + 1 \\ E_3 : &\quad yy'' + 2\ln(x)y' = e^x \end{aligned}$$

Par contre $ay^2 + by + c = 0$ n'est pas une ED, car elle ne fait pas intervenir de dérivées sur y. C'est simplement une équation sur y, et on comprend dans ce cas que y est un élément de $\mathbb{K}$.

Remarque (Qui est la fonction, qui est la variable)**.** Pour E_2 et E_3, le x n'est pas une fonction, mais la variable de la fonction y. Par exemple, pour E_2, on cherche toutes les fonctions $y : x \mapsto y(x)$ qui soient deux fois dérivables et telles que pour tout x,

$$4y''(x) + xy(x) = \tan x + 1$$

Souvent, on omet de préciser qui est la fonction inconnue (ici y) et qui est la variable (ici x pour E_2 et E_3). En pratique, il y a rarement ambiguité. Par exemple pour l'ED $x' + tx = 0$, on comprend que x est la fonction inconnue (vu que x' n'a de sens que si x est une fonction) et t est sa variable.

Remarque (Abus de notation)**.** Bien que $\tan x$, x et e^x soient des nombres, E_2 et E_3 représentent une égalité entre fonctions : il y a en fait un abus de notation. Par exemple pour E_2, on sous-entend que x et $\tan x + 1$ sont en fait les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \tan x + 1$.

Une ED est dite du premier ordre si la plus grande dérivée de y qui apparait est y' (pas de terme en y'', en y''', etc.). Une ED est dite du deuxième ordre si la plus grande dérivée de y qui apparait est y''. Dans ce chapitre, on se limitera à des ED d'ordre 1 ou d'ordre 2.

L'intervalle de définition (ou d'étude) d'une ED est un intervalle I, le plus large possible, sur lequel toutes les fonctions de l'équation sont bien définies :

- Pour E_1, l'intervalle d'étude est :
- Pour E_2, un intervalle d'étude possible est :
- Pour E_3, l'intervalle d'étude est :

Il arrive qu'on impose des conditions initiales sur y : par exemple $y(0) = y_0 \in \mathbb{K}$ et/ou $y'(0) = y_1 \in \mathbb{K}$. On doit alors trouver une fonction qui vérifie l'équation ainsi que les conditions initiales.

Résoudre une ED, c'est trouver, sur un intervalle d'étude I, ***toutes*** les fonctions $y : I \to \mathbb{K}$ qui vérifient l'équation et les éventuelles conditions initiales.

1.2 ED linéaires

Définition 11.1 – ED linéaire (ordre 1 ou 2)

Une ED d'ordre 1 est dite linéaire si elle est de la forme

$$a(x)y' + b(x)y = d(x)$$

Une ED d'ordre 2 est dite linéaire si elle est de la forme

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$$

avec $a, b, c, d : I \to \mathbb{K}$ des fonctions connues. Les fonctions a, b, c sont appelées coefficients de l'ED. La fonction d est appelée second membre de l'ED.

Ces ED linéaires sont dites résolues si $a(x) \equiv 1$, sinon elles sont dites non résolues.
Ces ED linéaires sont dites homogènes ou sans second membre si $d(x) \equiv 0$.

Exemple 1. ◦ E_1 et E_2 sont linéaires, mais pas E_3.

- E_1 est résolue, mais pas E_2. Toutefois, on peut rendre E_2 résolue en divisant l'équation par 4 (ce qui ne change pas les solutions)
- E_1 est homogène, mais pas E_2.

À toute ED linéaire, on peut associer une ED linéaire homogène en remplaçant son second membre par 0. Par exemple, l'ED homogène associée à E_2 est :

$$4y'' + xy = 0$$

On remarquera que cette ED est aussi une ED linéaire. Dans ce chapitre, toutes les ED qu'on étudiera seront linéaires. Cette linéarité permet d'obtenir ***toutes*** les solutions de E à partir ***d'une*** solution (dite particulière) de E et de ***toutes*** les solutions de E_H, cf section suivante.

1.3 Structure des solutions d'une ED linéaire

Définition 11.2 – Ensemble $A + b$

Soit E un ensemble muni d'une loi $+$. Soit $A \subset E$ et $b \in E$. On définit l'ensemble $A + b$ (ou $b + A$) par :

$$A + b = b + A = \left\{a + b \in E \;\middle|\; a \in A\right\}$$

Attention, b est un élément de E mais A et $A + b$ sont des parties de E.

Exemple 2. Avec $E = \mathbb{Z}$, on peut définir l'ensemble des nombres impairs positifs s'écrit

$$2\mathbb{N} + 1 = \{n + 1 \mid n \in 2\mathbb{N}\} = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

L'ensemble des nombres impairs (de signe quelconque) s'écrit $2\mathbb{Z} + 1$.

Théorème 11.3

Pour tout $x \in E$, on a $x \in A + b$ si et seulement si $x - b \in A$.

Dans la suite, on notera :

- E une ED linéaire, et $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de E.
- E_H l'équation homogène associée à E, et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions de E_H.

On veut résoudre E, c'est-à-dire trouver $\mathcal{S}$.

Théorème 11.4 – Structure de $\mathcal{S}$

Soit $y_p \in \mathcal{S}$ une solution (dite particulière) de E. Alors pour toute fonction $y : I \to \mathbb{K}$, les assertions suivantes sont équivalentes :

1. y est une solution de E, i.e. $y \in \mathcal{S}$.
2. y s'écrit sous la forme $y_H + y_p$ avec $y_H \in \mathcal{S}_H$, i.e. $y \in \mathcal{S}_H + y_p$.

Autrement dit, $\mathcal{S} = \mathcal{S}_H + y_p$.
Ainsi, pour déterminer $\mathcal{S}$ (donc ***toutes*** les solutions de E), il suffit de trouver l'ensemble $\mathcal{S}_H$ (càd ***toutes*** les solutions de E_H) ainsi qu'***une*** solution particulière $y_p \in \mathcal{S}$.

Démonstration. On fait la démonstration lorsque l'ordre n vaut 1, i.e. l'ED est de la forme $a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$, l'ordre 2 étant similaire. Comme $y_p \in \mathcal{S}$, on a :

$$\begin{aligned}
y \in \mathcal{S} &\iff \begin{cases} y_p \in \mathcal{S} \\ y \in \mathcal{S} \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_1(t)y_p' + a_0(t)y_p = b(t) \\ a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_1(t)y_p' + a_0(t)y_p = b(t) \\ a_1(t)(y' - y_p') + a_0(t)(y - y_p) = 0 \quad (L_2 - L_1) \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a_1(t)y_p' + a_0(t)y_p = b(t) \\ a_1(t)(y - y_p)' + a_0(t)(y - y_p) = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y_p \in \mathcal{S} \\ y - y_p \in \mathcal{S}_H \end{cases} \\
&\iff y - y_p \in \mathcal{S}_H \\
&\iff y \in \mathcal{S}_H + y_p
\end{aligned}$$

□

2 ED linéaires du premier ordre

Dans cette section, on s'intéresse aux ED linéaires du premier ordre. On considère dans un premier temps une ED sous forme résolue, donc sous la forme

$$E: \quad y' + a(t)y = b(t)$$

avec $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions données. L'équation homogène associée à E est donnée par :

$$E_H: \quad y' + a(t)y = 0$$

Hypothèse

On suppose que $a, b : I \to \mathbb{K}$ sont des fonctions *continues* (donc en particulier on peut calculer leur intégrale).

2.1 Méthode dans le cas général

Pour résoudre E, il faut trouver l'ensemble de solutions $\mathcal{S}$. D'après le Théorème 11.4, il faut trouver *toutes* les solutions de E_H puis une solution particulière y_p de E.

Étape 1 : solution générale y_H de E_H.

Théorème 11.5

Toutes les solutions de $y' + a(t)y = 0$ sont exactement les fonctions de la forme

$$y_H(t) = Ce^{-A(t)} \qquad \text{avec} \quad C \in \mathbb{K}$$

où $A : I \to \mathbb{K}$est une primitive (quelconque) de a.

Démonstration.

$\square$

Étape 2 : solution particulière y_p de E.

Deux méthodes sont possibles pour trouver y_p : ou bien on exhibe une solution “évidente”, ou bien on utilise la méthode de la variation de la constante.

Méthode – Variation de la constante

On cherche une solution particulière de $y' + a(t)y = b(t)$. On part de la solution générale de l'équation homogène E_H, à savoir :

$$y_H(t) = Ce^{-A(t)} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{K}.$$

Ensuite, on pose une fonction y_p de la même forme que y_H mais où la constante C est remplacée par une fonction inconnue $C(t)$:

$$y_p(t) = C(t)e^{-A(t)}$$

Pour trouver $C(t)$, on injecte cette forme de y_p dans l'équation E. On obtiendra systématiquement une assertion de la forme :

$$y_p' + a(t)y_p = b(t) \iff \dots \iff C'(t) = b(t)e^{A(t)}$$

La fonction C est ainsi une primitive de $t \mapsto b(t)e^{A(t)}$ sur I. Après ce caclul de primitive, on en déduit l'expression de y_p.

Remarque. Pour trouver une primitive de C, on fixe $t_0 \in I$ comme on le souhaite et on pose :

$$C(t) = \int_{t_0}^{t} b(s)e^{A(s)}ds$$

La fonction $C : t \mapsto C(t)$ choisie est alors l'unique primitive de be^A qui s'annule en t_0. Chaque valeur de t_0 conduit à une solution particulière y_p différente. Comme on a juste besoin d'une seule solution particulière, on prend la valeur de t_0 la plus simple possible (par exemple $t_0 = 0$ si $0 \in I$).

Étape 3 : solution générale de E.

Par le Théorème 11.4, y est solution de E si et seulement si

$$y(t) = y_p(t) + Ce^{-A(t)} \tag{$*$}$$

avec $C \in \mathbb{K}$. Attention à ne pas confondre $C(t)$, à savoir la fonction déterminée par la variation de la constante, et la constante C dans $Ce^{-A(t)}$, qui est une constante quelconque de $\mathbb{K}$.

Remarque. Chaque valeur de C dans ($*$) donne une solution différente : il y a donc une infinité de solutions pour l'équation E. C'est le cas pour toute ED linéaire.

2.2 Premiers exemples

Exemple 3. Résoudre $y' + \mathrm{th}(x)y = 2\,\mathrm{sh}(x)$.

Exemple 4. Résoudre $y' + 4xy = \ln(2x)e^{-2x^2}$.

Exemple 5. Résoudre $y' + 4xy = \ln(2x)e^{-2x^2}$.

2.3 Conditions initiales

Définition 11.6 – Problème de Cauchy (ordre 1)

Soit $a, b : I \to \mathbb{K}$ continues et $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$. Le système

$$(PC) : \quad \begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = \alpha_0 \end{cases}$$

est appelé un <u>problème de Cauchy</u> (ici linéaire, d'ordre 1)

Théorème 11.7 – Théorème de Cauchy-Lipschitz (ordre 1)

Pour chaque couple $(t_0, \alpha_0) \in I \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$.

Un problème de Cauchy correspond à un phénomène d'évolution d'une "grandeur" $y(t)$ en fonction du temps t. Une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz est que :

1. Si on connait la valeur de $y(t)$ en un temps t_0, càd on sait que $y(t_0) = \alpha_0$ où α_0 est donné...
2. Si on connait la loi d'évolution de $y(t)$, càd on connait l'ED vérifiée par $y : y' + a(t)y = b(t)$...

Alors cela suffit pour déterminer $y(t)$ de manière unique pour tous les temps t.

Pour trouver cette unique solution, on trouve d'abord toutes les solutions de l'équation $y' + a(t)y = b(t)$, en fonction d'une constante $C \in \mathbb{K}$. Puis on regarde quelle (unique) valeur de C permet de vérifier la condition initiale.

Exemple 6. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + \dfrac{1}{x}y = 0 \\ y(-1) = 2 \end{cases}$

Remarque. On aurait pu remarquer *sans calcul* que la fonction $y(x)$ trouvée ci-dessus est solution du problème de Cauchy. Dans ce cas,

2.4 Cas avec a, b constants

On suppose dans cette sous-partie que les fonctions a et b sont constantes : $a(t) \equiv a_0 \in \mathbb{K}$ et $b(t) \equiv b_0 \in \mathbb{K}$.

$$E : \quad y' + a_0 y = b_0$$

Dans ce cas, l'intervalle de définition est $I = \mathbb{R}$. Trouver toutes les solutions de l'équation homogène E_H n'est pas difficile. Pour trouver une solution particulière de E, on cherche toujours une solution évidente :

$$y_p(t) := \begin{cases} b_0 t & \text{si } a_0 = 0 \\ \dfrac{b_0}{a_0} & \text{si } a_0 \neq 0 \end{cases}$$

Exemple 7. Résoudre $y' + 2y = -3$.

3 ED linéaires du second ordre à coefficients constants

Dans cette partie, on s'intéresse aux ED linéaires du second ordre à coefficients constants :

$$E : \quad ay'' + by' + cy = d(x)$$

L'équation homogène associée est

$$E_H : \quad ay'' + by' + cy = 0$$

Hypothèse

On suppose $a, b, c \in \mathbb{K}$ avec $a \neq 0$. De plus, $d : I \to \mathbb{K}$ est une fonction *continue* donnée.

On pourrait en particulier mettre E sous forme résolue en divisant par a.

3.1 Méthode générale de résolution

Étape 1 : solution générale de E_H

Lorsque a, b et/ou c sont des complexes non réels, on doit se placer sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Théorème 11.8 – Résolution de E_H, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On associe à E_H l'équation caractéristique

$$(\text{Car}) : \quad ar^2 + br + c = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{C}$.

- Si $\Delta \neq 0$, on note r_1 et r_2 les deux racines (complexes) de (Car). Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$\boxed{y_H(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}}$$

- Si $\Delta = 0$, on note $r_0 = -\dfrac{b}{2a}$ l'unique racine (complexe) de (Car). Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$\boxed{y_H(x) = (A + Bx)e^{r_0 x} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{C}}$$

Lorsque a, b et/ou c sont des réels, il faut se placer sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on cherche des solutions de l'équation E qui sont à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Théorème 11.9 – Résolution de E_H, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On associe à E_H l'équation caractéristique

$$(\text{Car}) : \quad aX^2 + bX + c = 0$$

dont le discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac \in \mathbb{R}$.

- Si $\Delta > 0$, on note $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ les deux racines réelles de (Car). Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$\boxed{y_H(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

- Si $\Delta = 0$, on note $r_0 = -\dfrac{b}{2a} \in \mathbb{R}$ l'unique racine réelle de (Car). Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$\boxed{y_H(x) = (A + Bx)e^{r_0 x} \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

- Si $\Delta < 0$, on note $r = \alpha + i\beta$ et $\overline{r} = \alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées de (Car) avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors $y_H \in \mathcal{S}_H$ si et seulement si

$$\boxed{y_H(x) = e^{\alpha x}\left(A\cos(\beta x) + B\sin(\beta x)\right) \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

On notera que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, toutes les solutions y_H sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (noter que les variables $A, B, r_1, r_2, r, \alpha, \beta$ sont toutes réelles).

Exemple 8. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = 0$

Exemple 9. Résoudre $y'' + 4y' + 4y = 0$

Exemple 10. Résoudre $y'' + iy' + 2y = 0$

Exemple 11. Résoudre $y'' + 2y' + 5y = 0$

Étape 2 : solution particulière y_p

On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = d(t)$$

Au programme de MPSI, on ne traite que certains cas particuliers de fonctions d.

Méthode – Forme de y_p avec d exponentiel

Soit $q \in \mathbb{K}$. On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = e^{qt}$$

On considère l'équation caractéristique (Car) : $\quad ar^2 + br + c$

- Si q **n'est pas racine** de (Car), alors on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = Ce^{qt}$, avec $C \in \mathbb{K}$ à déterminer.
- Si q est **racine simple** de (Car), alors on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = Cte^{qt}$, avec $C \in \mathbb{K}$ à déterminer.
- Si q est **racine double** de (Car), alors on cherche y_p sous la forme $y_p(t) = Ct^2e^{qt}$, avec $C \in \mathbb{K}$ à déterminer.

Méthode – Forme de y_p avec d polynômial

Soit Q un polynôme. On cherche une solution particulière de

$$ay'' + by' + cy = Q(t)$$

On cherche y_p sous la forme $y_p(t) = R(t)$ où R est un polynôme à déterminer :

- Si $c \neq 0$, alors on cherche un polynôme R tel que $\deg R = \deg Q$.
- Si $c = 0$ et $b \neq 0$, alors on cherche un polynôme R tel que $\deg R = \deg Q + 1$.

Si $c = b = 0$, alors $ay'' = Q(t)$: on obtient R en intégrant deux fois $\frac{1}{a}Q$ (on aura $\deg R = \deg Q + 2$).

Étape 3 : solution générale de E

Comme pour l'ordre 1, une fois qu'on a déterminé une solution générale y_H de E_H (avec des constantes $A, B \in \mathbb{K}$) et une solution particulière y_p de E, alors $y_p + y_H$ est la solution générale de E.

Exemple 12. Résoudre $y'' + 4y' + 4y = x^2$.
On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = (A + Bx)e^{-2x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 13. Résoudre $y'' + 4y' = 1$.
On peut montrer que les solutions de l'équation homogène sont

$$y_H(x) = A + Be^{-4x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 14. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$.
On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^{x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Exemple 15. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = e^{x}$.
On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^{x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

3.2 Principe de superposition

Théorème 11.10 – Principe de superposition

Soit $d_1, d_2 : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues. On suppose que

$$\begin{array}{ll} y_1 : I \to \mathbb{K} \text{ est une solution de} & ay'' + by' + cy = d_1(t) \\ y_2 : I \to \mathbb{K} \text{ est une solution de} & ay'' + by' + cy = d_2(t) \end{array}$$

Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\lambda y_1 + \mu y_2 \text{ est une solution de} \qquad ay'' + by' + cy = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

Démonstration. On sait que

$$ay_1'' + by_1' + cy_1 = d_1(t) \qquad \text{et} \qquad ay_2'' + by_2' + cy_2 = d_2(t)$$

On multiplie la première ligne par λ, la seconde par μ, et on les additionne. On obtient alors

$$a(\lambda y_1'' + \mu y_2'') + b(\lambda y_1' + \mu y_2') + c(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

d'où

$$a(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + b(\lambda y_1 + \mu y_2)' + c(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$$

et donc $\lambda y_1 + \mu y_2$ est solution de l'équation ayant $\lambda d_1(t) + \mu d_2(t)$ pour second membre. □

Le principe de superposition se généralise à des ED linéaires de tout ordre, mais pour cette année, il est suffisant de le voir pour l'ordre 2. Grâce au principe de superposition, on peut traiter des cas de fonctions d plus variés.

Exemple 16. Résoudre $y'' - 4y' + 3y = \text{sh}x$.
On a vu que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$y_H(x) = Ae^{3x} + Be^x \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

Par ailleurs, on a vu que

$$x \mapsto -\frac{1}{2}xe^x \text{ est solution de } y'' - 4y' + 3y = e^x$$

$$x \mapsto \frac{1}{8}e^{-x} \text{ est solution de } y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$$

3.3 Conditions initiales

Définition 11.11 – Problème de Cauchy (ordre 2)

Soit $a, b, c \in \mathbb{K}$, $d : I \to \mathbb{K}$ continue et $(t_0, y_0, y_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$. Le système

$$(PC) : \quad \begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t) \\ y(t_0) = \alpha_0 \\ y'(t_0) = \alpha_1 \end{cases}$$

est appelé un problème de Cauchy (linéaire, d'ordre 2, à coefficients constants).

Théorème 11.12 – Théorème de Cauchy-Lipschitz (ordre 2)

Pour chaque triplet $(t_0, \alpha_0, \alpha_1) \in I \times \mathbb{K} \times \mathbb{K}$, le problème de Cauchy (PC) admet une unique solution $y : I \to \mathbb{K}$.

Comme pour l'ordre 1, pour résoudre un problème de Cauchy, on trouve d'abord la solution générale de l'équation (qui dépend de deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$). Puis on détermine quelle (unique) valeur du couple (A, B) permet de vérifier les conditions initiales. À l'ordre 2, comme il y a deux constantes, il faut une condition sur $y(t_0)$ et une sur $y'(t_0)$.

Exemple 17. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = e^{x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

On a vu à l'Exemple 15 que les solutions de l'équation $y'' - 4y' + 3y = e^{x}$ sont les fonctions

$$y(x) = -\frac{1}{2}xe^{x} + Ae^{3x} + Be^{x} \qquad \text{avec} \quad A, B \in \mathbb{R}$$

4 Compléments

4.1 Une conséquence de Cauchy-Lipschitz (ordre 1)

On considère l'ED linéaire d'ordre 1

$$y' + a(t)y = b(t)$$

avec $a, b : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues.

Théorème 11.13

Soit y_1, y_2 deux solutions de $y' + a(t)y = b(t)$. S'il existe $t_0 \in I$ tel que $y_1(t_0) = y_2(t_0)$, alors $y_1 = y_2$ sur I.

Autrement dit, si deux solutions d'un même problème de Cauchy sont égales en un point, elles sont égales en tout point.

Démonstration. Soit $z \in \mathbb{K}$ la valeur telle que $y_1(t_0) = y_2(t_0) = z$. Alors y_1 et y_2 sont solutions du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y' + a(t)y = b(t) \\ y(t_0) = z \end{cases}$$

Or, la solution de ce problème est unique par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Ainsi, $y_1 = y_2$. $\square$

4.2 Les "astuces" des physiciens... (HORS PROGRAMME)

Pour résoudre des ED, nos amis les physiciens emploient parfois des méthodes "aventureuses" pour un matheux... La méthode physicienne décrite ci-dessous ne doit PAS être écrite sur une copie de maths. Néanmoins, elle admet un équivalent mathématique rigoureux, si bien qu'elle conduit au bon résultat.

On considère l'ED définie sur $I = \mathbb{R}_+$

$$y' + a(t)y = 0$$

Les physiciens cherchent les solutions y qui sont strictement positives, càd telles que $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad y(t) > 0$.

Version physicienne	Version mathématique	
$\frac{dy}{dt} = -a(t)y$	$y' = -a(t)y$	
$\frac{dy}{y} = -a(t)dt$	$\frac{y'(t)}{y(t)} = -a(t)$	$y(t) \neq 0$ pour tout t donc on peut diviser par $y(t)$
$\int \frac{dy}{y} = -\int a(t)dt$	$\int_0^t \frac{y'(s)}{y(s)}ds = -\int_0^t a(s)ds$	On intègre entre 0 et t des fonctions continues
	$[\ln \lvert y(s)\rvert]_0^t = -[A(s)]_0^t$	
	$\ln y(t) - \ln y(0) = -A(t) + A(0)$	$\lvert y(t)\rvert = y(t) \quad \text{et} \quad \lvert y(0)\rvert = y(0)$
$\ln y = -A(t) + K$	$\ln y(t) = -A(t) + K$	avec $K := \ln y(0) + A(0)$
$y(t) = e^K e^{-A(t)}$		
$y(t) = Ce^{-A(t)}$		avec $C := e^K > 0$

On trouve ainsi toutes les solutions strictement positives de $y' + a(t)y = 0$

4.3 ED d'ordre 1 non résolue : $a(t)y' + b(t)y = d(t)$ – raccord de solution

On considère une ED d'ordre 1 sous forme non résolue

$$E: \quad a(t)y' + b(t)y = d(t)$$

définie sur un intervalle d'étude I. Si a ne s'annule pas sur I, alors en divisant l'équation par $a(t)$ on se ramène à une forme résolue. Mais comment faire si a s'annule sur un ou plusieurs points de I ?

Exemple 18. Prenons un exemple où a ne s'annule qu'en un seul point de I :

$$E: \quad t^2y' - y = 0$$

On cherche donc les solutions y définies sur $I = \mathbb{R}$. La méthode va ressembler à une analyse-synthèse.

À ce stade, on a en quelque sorte fini l'analyse. Pour qu'une fonction y soit solution, elle doit nécessairement vérifier la relation ci-dessus pour $y(t)$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$. On cherche ensuite pour quelles valeurs de C_1 et C_2 est-ce que la fonction y est bien solution de E. C'est en quelque sorte une synthèse.

Mais que faut-il vérifier pour s'assurer que y est solution de E ? Il est clair que y est dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ (car $\mathbb{R}_-^*$ est un ouvert et que $y\big|_{\mathbb{R}_-^*}$ est dérivable) et que pour tout $t < 0$, on a $t^2 y' - y = 0$, puisque c'est en résolvant cette équation qu'on a obtenu l'expression de y sur $\mathbb{R}_-^*$. Idem pour $\mathbb{R}_+^*$. Il reste à vérifier que y est dérivable en 0 et vérifie l'équation E en $t = 0$. Or, la valeur de $y(0)$ a été choisie de façon à vérifier l'équation E en $t = 0$. Donc, **la seule chose à vérifier est que y soit (continue et) dérivable en 0.**

Voici la méthode générale lorsque a ne s'annule qu'en un point $t_0 \in I$. Dans ce cas, on peut partitionner l'ensemble $I \setminus \{t_0\}$ en deux intervalles qu'on note $I_1 = I \cap \left]-\infty, t_0\right[$ et $I_2 = I \cap \left]t_0, +\infty\right[$.

Méthode – Raccorder une solution

On cherche à résoudre $a(t)y' + b(t)y = d(t)$ dans le cas où a s'annule en un seul point $t_0 \in I$. On se donne une solution $y : I \to \mathbb{R}$ de l'équation.

- Sur I_1, y est égal à une expression qui dépend d'une constante C_1.
- Sur I_2, y est égal à une expression qui dépend d'une constante C_2.
- En t_0, on obtient que $b(t_0)y(t_0) = d(t_0)$, ce qui fournit une troisième condition.

Ensuite, on cherche des conditions sur C_1 et C_2 pour que y soit (continue et) dérivable en t_0. Cela s'appelle **raccorder** une solution.

Enfin, si a s'annule en plusieurs points $t_0, t_1, \cdots, t_n \in I$, on doit raccorder la solution en chacun de ses points.

5 Méthodes pour les exercices

Méthode – Résolution d'une ED linéaire

0. On détermine $\mathbb{K}$ (sans l'écrire) et un intervalle d'étude I (qu'on écrit).
1. On trouve une **solution générale**, notée y_H, **de l'équation homogène** E_H, qui dépendra d'une constante $C \in \mathbb{K}$ pour une ED d'ordre 1, ou de deux constantes $A, B \in \mathbb{K}$ pour une ED d'ordre 2.
2. On trouve une **solution particulière**, notée y_p, de l'équation E. Une seule suffit !
   - On peut d'abord chercher une solution évidente.
   - Sinon, si (E) est d'ordre 1, on utilise la **variation de la constante**.
   - Si (E) est d'ordre 2, on regarde le second membre (polynôme ou fonction $t \mapsto e^{qt}$ sont au programme) et on cherche y_p sous une **forme "similaire"**.
   - Enfin, le **principe de superposition** est utile notamment pour l'ordre 2, afin de se ramener à un second membre qui est un polynôme ou une fonction $t \mapsto e^{qt}$
3. On forme la solution (générale) de l'équation E en additionnant y_p et y_H.
4. S'il y a une ou plusieurs **conditions initiales** à vérifier, on cherche les valeurs de A, B, C qui permettent de les vérifier.